Werner Kratz
Marius Hofert

Universität Ulm
Wintersemester 2008/2009
20.11.2008

Übungen zur Analysis 2

Blatt 7

Abgabe und Besprechung, Donnerstag, den 27.11.2008

Aufgabe 33 (3 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \text{falls } \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}$$

Zeige:

(a) f ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{\binom{0}{0}\}$.

(b) f ist unstetig in $\binom{0}{0}$.

(c) Die Funktionen $f_1(x) := f(x,y)$ ($y \in \mathbb{R}$ fest) und $f_2(y) := f(x,y)$ ($x \in \mathbb{R}$ fest) sind stetig auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 34 (6 Punkte)

Welche der folgenden Teilmengen $N \subset M$ sind relativ offen bezüglich M?

(a) $N = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1 \text{ und } x > 0\} \subset M = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$.

(b) $N = (0,1] \times [0,1) \subset M = (-\infty,1] \times [0,1]$.

(c) $N = (-\infty,0) \times (0,1] \subset M = \mathbb{R} \times (0,2)$.

Aufgabe 35 (6 Punkte)

Untersuche, ob für folgende Punktmengen $M \subset \mathbb{R}^n$ und Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ jeweils $\min\limits_{x\in M} f(x)$ und $\max\limits_{x\in M} f(x)$ existieren.

(a) $M = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = y$.

(b) $M = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \geq 4\} \subset \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$.

(c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4 \right\} \subset \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = e^{yz} - y\cos z$.

Aufgabe 36 (8 Punkte)

Skizziere oder beschreibe die folgenden durch Parameterdarstellungen gegebenen Punktmengen:

(i) $x(t) = \binom{t}{\sqrt{1-t^2}}$, $t \in [-1,1]$.

(ii) $x(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-\varphi}\cos\varphi \\ e^{-\varphi}\sin\varphi \end{pmatrix}$, $\varphi \in [0,\infty)$.

(iii) $x(t) = \binom{\cosh t}{\sinh t}$, $t \in \mathbb{R}$.

(iv) $x(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t - \cos(2t) \\ 2\sin t - \sin(2t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$ (*Kardioide* oder *Herzkurve*).

(v) $x(t) = \begin{pmatrix} \sin t \cos \frac{\pi}{3} \\ \sin t \sin \frac{\pi}{3} \\ \cos t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(vi) $x(\psi, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin\psi \cos\varphi \\ r \sin\psi \sin\varphi \\ 2r \cos\psi \end{pmatrix}$, $\psi \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r > 0$ fest (*Ellipsoid*).

(vii) $x(\psi, \varphi) = \begin{pmatrix} (R + r\sin\psi)\cos\varphi \\ (R + r\sin\psi)\sin\varphi \\ r\cos\psi \end{pmatrix}$, $\psi \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ mit gegebenen festen $0 < r < R$ (*Torus*).

(viii) $x(t, \varphi) = \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ 1 - t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ (*Kegel*).

Aufgabe 37* (Lemma von Urysohn) (6 Punkte)

Es seien M_1 und M_2 nichtleere, abgeschlossene und disjunkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeige: Dann gibt es eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \in M_1$, $f(x) = 1$ für $x \in M_2$ und $0 < f(x) < 1$ für $x \notin M_1 \cup M_2$.

Hinweis

Betrachte die Funktion $f(x) := \frac{d(x, M_1)}{d(x, M_1) + d(x, M_2)}$ mit der Abstandsfunktion gemäß Aufgabe 32.